x	$-\frac{1}{n}$	0	$\frac{n-1}{n}$	α_n	$+\infty$
$\varphi_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	‖ $-\infty$	$-\ 0\ +$	$\ln n-\frac{n-1}{n}$	$+\ 0\ -$	$-\infty$

• $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{n})^+}\varphi_n(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{n}\right)^+}[f_n(x)-x]=-\infty.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ x\left(\frac{\text{Log}(x)}{x}+\frac{\text{Log}\left(n+\frac{1}{x}\right)}{x}-1\right)\ \right]=-\infty.$

$\star$ φ_n est continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{n};\frac{n-1}{n}]$.

$\Rightarrow$ φ_n réalise une bijection de $]-\frac{1}{n};\frac{n-1}{n}]$ sur $]-\infty;\ln n-\frac{n-1}{n}]$

qui contient 0 car $\ln n-\frac{n-1}{n}=\ln n-1+\frac{1}{n}>0$ d'aprés **B)1/.**

D'où l'équation $\varphi_n(x)=0$ possède une seule solution dans $]-\frac{1}{n};\frac{n-1}{n}]$

Or $\varphi_n(0)=\text{Log}(1+n\times 0)-0=0$ alors cette solution n'est autre que 0.

$*$ φ_n est continue et strictement décroissante sur $[\frac{n-1}{n};+\infty[$

$\Rightarrow$ φ_n réalise une bijection de $[\frac{n-1}{n};+\infty[$ sur $]-\infty;\ln n-\frac{n-1}{n}]\ni 0$

$\Rightarrow$l'équation $\varphi_n(x)=0$ possède une seule solution α_n dans $[\frac{n-1}{n};+\infty[$

Bilan : l'équation $\varphi_n(x)=0$ admet deux solutions 0 et α_n.

3/a- • $\varphi_n(\text{Log}(n))=\text{Log}[1+n\text{Log}(n)]-\text{Log}n$

$$=\text{Log}\left[\frac{1+n\text{Log}(n)}{n}\right]=\text{Log}\left[\frac{1}{n}+\text{Log}(n)\right]$$

Or $\forall x\in]1;+\infty[;\ 1-\frac{1}{x}<\text{Log}x\Leftrightarrow\forall x\in]1;+\infty[;\ 1<\text{Log}x+\frac{1}{x}$

Donc $\forall n\in IN^*\backslash\{1\}\ ;\ 1<\text{Log}n+\frac{1}{n}$

$\Rightarrow\ \forall n\in IN^*\backslash\{1\}\ ;\ \varphi_n(\text{Log}(n))>0.$

• $\varphi_n(2\text{Log}(n))=\text{Log}[1+2n\text{Log}(n)]-2\text{Log}n$

$$=\text{Log}[1+2n\text{Log}(n)]-\text{Log}(n^2)$$

$$=\text{Log}\left[\frac{1+2n\text{Log}(n)}{n^2}\right]=\text{Log}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2\text{Log}(n)}{n}\right]$$

Or $\text{Log}n<\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow 2\text{Log}n<n-\frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow\frac{2\text{Log}n}{n}<1-\frac{1}{n^2}\Leftrightarrow\frac{2\text{Log}n}{n}+\frac{1}{n^2}<1$$

Ainsi $0<\frac{2\text{Log}n}{n}+\frac{1}{n^2}<1$ d'où $\varphi_n(2\text{Log}(n))<0.$